



TITLE:

The Schur Multiplier Revisited (有限群の研究)

AUTHOR(S):

DOLDSCHMIDT, D.M.; 五味, 健作

CITATION:

DOLDSCHMIDT, D.M. ...[et al]. The Schur Multiplier Revisited (有限群の研究). 数理解析研究所講究録 1975, 233: 43-46

ISSUE DATE:

1975-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105467>

RIGHT:

The Schur Multiplier Revisited

D. M. Goldschmidt

五味健作・記

この講演は飛び入りで行われたものである。内容は題名の示すように Schur multiplier を新しい視点から見直すというもので、新事実を含むものではない。30分という短い講演時間のため、紹介されたのは理論のさわりの部分だけである。以下、講義ノートをもとに講演の内容をまとめてみる。

G , \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}G$ でそれぞれ群, 有理整数環, G の \mathbb{Z} 上の群環を表わす。 g, h, \dots で G の元を表わす。 ε を augmentation map: $\mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$, $\Delta(G)$ を augmentation ideal ($\Delta(G) = \ker \varepsilon$) とすれば、 $\Delta(G)$ は $\{1-g \mid g \in G\}$ 上の自由可換群である。
 $\hat{g} = 1-g$ とおけば、

$$* \quad \hat{g}\hat{h} = \hat{g} + \hat{h} - \hat{gh}$$

が直ちに確かめられる。これは基本等式であり、以後の展開で重要な役割を演じる。*を使って次の良く知られた補題が証明される。

補題。 $0 \rightarrow \Delta(G)^2 \hookrightarrow \Delta(G) \rightarrow G/G' \quad \text{は完全系列。}$
 $\hat{g} \longmapsto G'g$

$\Delta^{(2)}(G) = \Delta(G) \otimes_{\mathbb{Z}(G)} \Delta(G)$ とおき、 $\pi: \Delta^{(2)}(G) \rightarrow \Delta(G)$ を
 product map ($\pi: \hat{g} \otimes \hat{h} \mapsto \hat{g}\hat{h}$) とし、 $M(G) = \ker \pi$ と
 定義する。 Δ 、 $\Delta^{(2)}$ 、 M は群で定義され、可換群に値をとる
 functor である。また $M(G)$ は自然に $H_2(G, \mathbb{Z})$ と同型になる。
 $\text{Im } \pi = \Delta(G)^2$ は自由可換群だから、 $M(G)$ は $\Delta^{(2)}(G)$ の直和因
 子となる。

A を自明な G 加群、 $Z^2(G, A)$ を 2-cocycle、 $B^2(G, A)$ を 2-
 coboundary、 $H^2(G, A) = Z^2(G, A)/B^2(G, A)$ とする。理論の
 “Main point” は次の補題である。

補題。 $f \in Z^2(G, A)$ とすれば $\hat{f}(\hat{g} \otimes \hat{h}) = f(g, h)$ なる
 $\hat{f}: \Delta^{(2)}(G) \rightarrow A$ があり、対応 $f \leftrightarrow \hat{f}$ は $Z^2(G, A)$ と
 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta^{(2)}(G), A)$ との同型を与える。さらに、 $f \in B^2(G, A)$
 なるためには、ある $\varphi: \Delta(G) \rightarrow A$ によって $\hat{f} = \varphi \circ \pi$ とな
 ることが必要かつ十分。

これにより $Z^2(G, A)$ と $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta^{(2)}(G), A)$ を同一視する。こ
 の同型から準同型 $\rho: H^2(G, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A)$ が得られ
 る。

定理1。自然な完全系列

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G/G', A) \rightarrow H^2(G, A) \xrightarrow{\rho} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A) \rightarrow 0$$

が存在する。この完全系列は分解する。

とくに $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ または \mathbb{C}^* とすれば $H^2(G, A) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(G), A)$ が得られる。

定義. $R(G) = \{(x, g) \mid x \in \Delta^{(2)}(G), g \in G\}$ とし、 $R(G)$ の中に $(x, g)(x_1, g_1) = (x + x_1 + \hat{g} \otimes \hat{g}_1, gg_1)$ により積を定義する。そのとき $R(G)$ は群となる。 $\Delta^{(2)}(G)$ を $\{(x, 1) \mid x \in \Delta^{(2)}(G)\}$ と同一視し、 $r(g) = (0, g)$ とおく。このとき、

$$0 \longrightarrow \Delta^{(2)}(G) \hookrightarrow R(G) \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

は中心拡大であり、 $R(G) = \langle r(g) \mid g \in G \rangle$ 。

定理 2. (x, g) に $\pi(x) + \hat{g}$ を対応させる $R(G)$ から $\Delta(G)$ への写像は群の全準同型であり、 $\ker = R(G)'$ 。

系. $M(G) = \Delta^{(2)}(G) \cap R(G)'$ 。

定義. 中心拡大 $0 \rightarrow A \xrightarrow{\tau} X \rightarrow G \rightarrow 1$ が essential であるとは $\text{Im } \tau \subseteq X'$ なることをいう。 \tilde{R} が G の representation group であるとは essential な中心拡大 $0 \rightarrow M(G) \rightarrow \tilde{R} \rightarrow G \rightarrow 1$ が存在することをいう。

系. 任意の G に対して、representation group が存在する。すなわち、 $\Delta^{(2)}(G) = M(G) \oplus K$ とすれば $R(G)/K$ が G の representation group である。

定理 3. $0 \rightarrow A \hookrightarrow X \rightarrow H \rightarrow 1$ を中心拡大とする。

$f: G \rightarrow H$ が準同型ならば、可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Delta^{(2)}(G) & \longrightarrow & R(G) & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow \varphi & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & H \longrightarrow 1
 \end{array}$$

で次の(1)(2)を満たすものが存在する。(1) $f=1$ のときは

$\text{Im } \psi|_{M(G)} = A \cap X'$ であり、 $A \subseteq X'$ ならば φ は onto であり、 φ は G の rep. group を継由して得られる (factor through)。

(2) もし $E_{\mathbb{Z}}^1(G/G', A) = 0$ で \tilde{R} が G の rep. group なら、 φ は \tilde{R} を継由するように選べる。

定理4. $1 \rightarrow N \rightarrow F \xrightarrow{f} G \rightarrow 1$ を完全系列とせよ。中心拡大 $0 \rightarrow N/[N, F] \rightarrow F/[F, N] \rightarrow G \rightarrow 1$ が $\alpha \in H^2(G, N/[N, F])$ に対応するとせよ。そのとき、

$M(F) \xrightarrow{M(\varphi)} M(G) \xrightarrow{f(\alpha)} N/[N, F] \rightarrow F/F' \rightarrow G/G' \rightarrow 0$ は完全系列である。